От анализоцентризма к логикоцентризму в преподавании математики для информатиков*

Н.Н. Непейвода

Примечание и предупреждение

Данная статья была написана в 1996 г. как один из элементов отчета по теме, выполнявшейся по гранту программы «Университеты России» и послана в НГУ на конференцию по методике преподавания. В результате страшного сопротивления проводящимся в ней еретическим идеям она была опубликована лишь в электронной форме. Здесь представлен дважды пересмотренный ее вариант: первый пересмотр осуществлен после работы автора на ФИТ НГУ, а второй — после возобновления работ в УдГУ и подведения первых итогов эксперимента ФИТ НГУ, выхода монографии [10], учебника [11] и сдачи в печать задачника [12], сбора отзывов выпускников, обучавшихся по экспериментальным программам.

Пересмотр связан не только с показом дополнительных преимуществ подхода. выявившихся после анализа практики работы выпускников, но и с расстановкой предупредительных знаков. В частности, опыт показал, что изложенные в статье идеи таят *две опасности*.

Во-первых, можно легко впасть в профанацию, пытаясь преподавать логику, не обладая при этом достаточной логической культурой. Примеры такой профанации автор в последние два года, когда его идеи стали кое-где переходить из разряда еретических в разряд общепризнанных, имеет несчастье постоянно наблюдать. Поэтому стоит еще раз подчеркнуть, что, пытаясь начинать реформы, нужно прежде всего посмотреть на свои силы, есть ли достаточное число людей с хорошим фундаментом в той области, которую пытаетесь сделать фундаментальной.

*Автор приносит благодарности А.П. Бельтюкову, Л.К. Непейвода и Тоне Непейвода, И. Н. Скопину, С. Н. Васильеву, А.Д. Яшину за многочисленные ценные обсуждения.

Во-вторых, пытаясь перестраивать курс математики, неизбежно натыкаешься на сопротивление исключительно мощного физического сообщества и большей части математиков, которые рассматривают анализ почти как священную корову. Более того, глупо преодолевать такое сопротивление в лоб (и редко удается, и наломать дров можно не меньше, чем при любой революции…) Поэтому стоит вводить новую ориентацию математики именно на новых специальностях либо тех специальностях, где неадекватность традиционных курсов высшей математики уже очевидна, ведь традиции почти никогда не заслуживают грубой ломки. Если обомшелое в них обойти, они и сами потихоньку отвалятся, а разумное из них останется. А при насильной реформе слишком часто вместе с водой выплескивается и ребенок (смотри, например, реформы Петра I или Ельцина).

1 Введение

В настоящее время происходит переоценка относительной роли различных математических курсов в образовании. В частности, это касается и курса логики, традиционно относящегося для естественных и лингвистических специальностей к математическому циклу.[1] В Удмуртском университете (УдГУ) на практике преподавания проверен ряд подходов к самому курсу логики и к его месту в системе образования на специальностях математика, прикладная математика и информационные системы. Данная статья основана прежде всего на двадцатилетнем опыте данного университета, в частности, автора, проф. А.П. Бельтюкова, доц. А.Д. Яшина и некоторых других преподавателей и на пятилетнем опыте работы ФИТ НГУ, где автор явился одним из создателей концепции учебного плана.

Изменение подходов к логике оказало достаточно сильное влияние как на другие математические курсы, так и на общую ориентацию студентов. В дальнейшем это получило отражение в учебных планах групп повышенного уровня, с 1990 г. регулярно набираемых в УдГУ, в учебном плане специальности ‘Информационные системы.’ Один из наиболее любопытных аспектов такого влияния кратко можно сформулировать следующим образом. Математический анализ и связанный с ним цикл дисциплин перестал играть роль

[1] Стоит вспомнить, что по классификации Британской энциклопедии логика относится к отраслям знания первого уровня, в отличие от математики, являющейся подразделом естественных наук.

станового хребта математического образования. На его место уверенно встал логический цикл.

Известно, что хорошая организация обучения требует выделения главного курса, задающего тон, язык и систему ценностей для других курсов данного цикла. В математике главной дисциплиной долгое время считалась геометрия, затем она уступила место анализу, а во второй половине XX века в ряде университетов Запада — алгебре (в отдельных — современной геометрии, базирующейся на алгебре и топологии.)

Логика, ставшая в XIX веке в значительной степени математической дисциплиной, накопила к настоящему времени громадный потенциал идей, методов и результатов, и, безусловно, задает тон в математическом языке нынешнего времени. Кроме того, логика, к счастью, не утеряла и роль одной из ведущих гуманитарных дисциплин, математические методы естественно вписались в систему неформальных и полуформальных методов традиционной логики, и поэтому логика — одно из тех мест, где можно легче всего навести мосты между математикой и ее приложениями, прежде всего, нетрадиционными, не охватываемыми аппаратом математического анализа.[2]

Поэтому *логический цикл в настоящее время уже подготовлен к тому, чтобы играть роль ведущего*.

В целом необходимо подчеркнуть, что *выбор одного из четырех возможных базисных курсов диктуется квалификацией преподавательского состава и традициями данного университета*.

Хотя и недопустимо делать выводы о том, какая из основ лучше, необходимо сравнивать подходы к преподаванию математики, базирующиеся на разных фундаментах. Кроме того, разные базисные курсы благоприятствуют различным типам мышления и определяют типы математических моделей, выбираемых в дальнейшем выпускниками. Так, аналитический цикл делает в настоящее время упор на отработке навыков манипулирования стандартными преобразованиями, символьными вычислениями и стандартными блоками рассуждений. Геометрический цикл всегда базировался прежде всего на соединении образного и точного мышления. Алгебраический — на выделении абстрактных структур и их взаимных представлений. Оказывается, что логический цикл при соответствующем преподавании развивает творческое мышление,[3] навыки понимания и критического анализа. Таким образом, он

[2]Но и с традиционными приложениями логика работает не хуже, чем аналитические дисциплины, прежде всего ввиду большей концептуальной мощности ее идей и более глубокого анализа моделей.

[3]Здесь и ниже творческое и рутинное мышление — не оценочные слова, а термины со-

приближает математику к гуманитарным наукам.

Далее, те, кто изучают математику, базируясь на анализе, получают навыки формальных преобразований аналитических формул. Выразить содержательные понятия аналитической формулой часто означает ввести недопустимую с точки зрения современной теории измерений шкалу оценок, сводящую наблюдаемые явления к действительным числам. А выражение всего действительными числами и вытекающая из него убежденность в возможности сравнить два любых объекта либо решения и однозначно отдать предпочтение одному из них, является одной из бед современной науки и цивилизации. В данном пункте мы согласны с идеями книги А. А. Мальцева[4]. Данное следствие системы (не только школьного) образования приводит к страшной по своим внутренним предпосылкам и отдаленным последствиям философии утилитаризма.

Те, кто изучает логику, получают при современном подходе навыки преобразования не математических формул, говорящих о количествах. а произвольных предложений, что, конечно, несравнимо ценнее.

Те, кто базируются на алгебре, получают представление о богатстве математических структур и их сложных взаимоотношениях, и уже не могут быть склонны к столь примитивной философии, как традиционно образованные люди, считающие себя рационально мыслящими. Точно так же и современная геометрия дает изрядную инъекцию против примитивизма.

2 Общие педагогические принципы

Как известно, Я. А. Коменский в качестве одного из базовых педагогических принципов выдвинул требование, чтобы преподаватель излагал лишь истины, дабы не вводить учащихся в заблуждение [5]. Убеждение в том, что истина доступна человеку, а не Богу, является одним из проявлений человеческой самонадеянности. Оно поддерживается как многими религиозными проповедниками, чей духовный уровень порою резко отстает от степени убежденности в правоте данного конкретного учения, так и адептами исповедуемой

временной психологии и науки о творчестве, см., напр., [2].

[4]Психологическая готовность выпускника школы… имеется к измерению чего угодно: от количества чертей, помещающихся на острие иглы, до интеллектуального развития и национального продукта… Не составляет труда убедить среднего индивидуума измерять все в килограммах и метрах (альтернативный, менее физический пример: в долларах). [8, стр. 205]

большинством нынешнего научного сообщества квазирелигии — “религии прогресса”.[5] На практике в школе требование Коменского привело к развитию авторитарного стиля преподавания, при котором учитель *уверен*, что он излагает истины, а учащиеся привыкают без сомнений заглатывать ту информацию, которая им преподносится. Это губительно действует на задатки критического мышления учащихся и в вуз они приходят со сформировавшимися традициями рутинного мышления и ученической в худшем смысле этого слова работы.

В результате студенты приходят на первый курс вуза со следующими отрицательными навыками, закрепившимися в ходе школьного обучения.

1. Они панически боятся ошибок,поскольку даже исправленная ошибка приводит к снижению оценки за работу.

2. Они привыкли к тому, что в первую очередь оценивается полученный ответ и оформление работы, а не ее содержание. Оригинальное решение задачи, сопровождающееся технической либо арифметической ошибкой и заканчивающееся неправильным ответом, как правило, оценивается двойкой. Часто так же оценивается и просто оригинальное решение, не соответствующее единственным канонам оформления, к которым привык учитель и которые он способен понять.

3. Они привыкли воспринимать слова учителя как нечто не подлежащее (по крайней мере, выраженному явно) сомнению. Как известно, попытка указать учителю даже на его явную ошибку обычно жестоко карается.

4. Они привыкли к тому, что их решения оцениваются извне, учителем либо сравнением с ответом в конце задачника. Навыки самопроверки почти отсутствуют.

5. Они привыкли рассматривать учителя и учебники как единственные источники знаний и теряются при необходимости что-то изучить самостоятельно. Более того, часто самостоятельно полученные неканонические знания наказываются учителем и общественным мнением класса.

[5] В дальнейшем словосочетание религия прогресса употребляется без кавычек, хотя нужно помнить о принципиальной разнице уровня данного мировоззрения и настоящих религий.

6. Они почти моментально перестают работать, как только один из них вызывается к доске для показа решения.

7. Они привыкли к формальной дисциплине на занятиях и к тому, что спросить нечто у соседа (даже тихо и с целью лучше понять) является криминалом, а тупо сидеть, думая по себя: “Все равно ничего не понимаю,” — нет.

8. Они практически не могут задавать вопросы и осознанно формулировать, что же не понято. Более того, сознаться в непонимании зачастую считается позором.

Как известно, в университетском образовании никогда не стремились сделать вид, что излагаются лишь истины, но традиции школьного образования в значительной степени влияли на преподавание основных курсов, сомнительным вещам оставалось место лишь на курсах специализации.

Развитие логики XX века поставило научное сообщество перед несостоятельностью мифа об абсолютности научной истины или даже эвфемизмов о том, что научное знание является приближением к истине. Выяснилось, что даже в математике исходные понятия гораздо более относительны, чем это можно было ожидать в XIX веке, а тем более в XVII, когда формировалось мировоззрение науки. Таким образом, упомянутое выше пожелание Я. А. Коменского является невыполнимым, и в таком качестве неизбежно превращается в благоглупость.[6] Тем не менее призрак абсолютной истины по-прежнему бродит в методиках преподавания. Кажется аморальным учить студентов тому, недостатки чего ты знаешь. Но разве не более аморально учить тому, недостатки чего тебе неизвестны?[7]

> **Принцип 1:** Бесспорное бесполезно. Любое научное знание односторонне, оно является результатом самоограничения. И лучше, если это самоограничение будет сознательным и будут осознаваться, а не отвергаться с порога, возможные альтернативы.

[6]Насколько известно автору, понятие “благоглупость” введено Лесковым и отсутствует в ведущих европейских языках. Впрочем, Оливье де Боно при попытках обучения англосаксов (американцев) азам творческого мышления был вынужден изобрести слово ‘авось’, отстутствующее в английском [3].

[7]Тем более, что зачастую эта неизвестность — результат почти сознательного нежелания знать, уклонения от неудобных знаний.

Итак, нужно стараться открывать дыры и недостатки даже в самых устоявшихся областях знания, показывать возможные альтернативы, тем более, что это зачастую позволяет ярче обосновать преимущества того подхода, который сегодня наиболее распространен, в большинстве встречающихся в нынешней практике ситуаций. Это психологически подготавливает учащихся к возможной смене парадигмы, а наиболее дерзких из них поощряет к критическим исследованиям в альтернативных областях, которые иначе остались бы вотчиной самодовольных невежд.[8]

Соответственно, отказавшись от монополии на истину, преподаватель вынужден отказаться и от монополии на путь к ней. Известно, что каждый человек незаменим. Он идет к знанию своим собственным путем.[9] Таким образом:

> **Принцип 2:** В идеале учитель должен помочь ученику выбрать наиболее подходящий для него путь.

Автор понимает, что это требует от преподавателя глубокого понимания сущности предмета и высокой общей культуры, но по крайней мере даже средний преподаватель в соответствующей атмосфере приучается терпимее относиться к нарушениям формы и не подавлять оригинальность мышления.

Теперь рассмотрим известную оппозицию: творческое и рутинное мышление. Одно из их важнейших различий — отношение к ошибкам. Если творчески мыслящий человек рассматривает ошибку как закономерный этап на пути к решению задачи, то рутинно мыслящий — как грех. Если творческий стремится превратить выявленную и понятую им ошибку в элемент решения (хотя бы использовав ее как отправной пункт для того, чтобы сделать наоборот), то рутинно мыслящий стремится не признавать ошибки до последнего момента, а, будучи вынужден признать ее, пытается отбросить все сделанное и начать сначала. Итак:

> **Принцип 3:** Ошибка является неизбежным шагом на пути к решению трудной задачи. Задача преподавателя — научить студентов здравому отношению к ошибкам и научить их превращать ошибочные попытки в правильное решение.

---

[8]Негативизм — одна из форм конформизма. Претворять в жизнь лозунг Дж. Оруэлла '*Ignorance is power*' можно двумя способами. Можно тупо следовать общепринятому, можно столь же тупо отвергать его, не желая знать, почему же большинство пошло по данному пути.

[9]Пути большинства могут почти совпадать (царский путь, торная дорога), но тем ценнее пути меньшинства.

Далее, развитие критического мышления требует научить критическому отношению и к словам педагога. Поэтому иногда на занятиях стоит допускать намеренные ошибки либо недостаточно обоснованные утверждения, и поощрять тех, кто это заметит.[10] Но в данном случае необходимо ставить и ловушки другого рода: маскировать под ошибки или необоснованные выводы нетривиальные следствия из изучаемого материала и приводить к противоречию попытки их опровергнуть. Тот, кто возражает, должен быть готов к отстаиванию своих возражений и к отступлению, если они будут признаны неправильными (в первую очередь, им самим). Соответственно, иногда психологически необходимо реагировать на правильные ответы как на неправильные, требуя дополнительных объяснений либо всячески вселяя в учащихся сомнение, поскольку они должны учиться отстаивать то, в чем уверены. Недостаточно обоснованный ответ не является решением с точки зрения математика. И, наконец, еще один вид ловушки: хвалить неверное решение, с тем, чтобы стимулировать у учащихся самопроверку, а не ожидание оценки от преподавателя. Поэтому

> **Принцип 4:** Вырабатывая у учащихся здравое отношение к ошибкам, не стесняйтесь показывать это на своем примере. Допустимы даже некоторые провокационные приемы, чтобы разрушить стереотип безошибочного продвижения к истине и выработать навыки ответственного критического подхода.

Скорость работы и понимания у разных студентов разная. Поэтому при ориентации на средних остаются недогруженными сильнейшие и за бортом те, кто в данный момент не поспел за другими, но в силу большей глубины и основательности в дальнейшем мог бы быть как минимум не хуже. Как известно, быстрота понимания не означает его глубину (хотя и не противоречит ей.) Поэтому необходимо в большинстве случаев поощрять коллективную работу студентов, вырабатывая навыки неформальной дисциплины и взаимного общения, не мешающего работе других. Если ты не понял — сначала спроси товарища, а уже затем обращайтесь к преподавателю. Если товарищ понял быстрее, ему будет полезно объяснить тебе, если он только думал, что понимает, он выявит свою дыру и вместе учащиеся смогут задать более глубокий и точный вопрос.

---

[10] Соответственно, группа, пропустившая такое место, заслуживает некоторой моральной взбучки, и здесь не стоит жалеть розгу.

Принцип 5: Поощряйте коллективную работу в маленьких группах и взаимообмен идеями и решениями по инициативе учащихся.

Возможно, что этот принцип связан еще и с особенностями психологии русских учащихся. В русских учебных заведениях никогда не было ни американского духа глубокого индивидуализма и безжалостной конкуренции между учащимися, ни английской щепетильности в вопросах чести. Так что подсказки и списывание неискоренимы, и лучше уж их легализовать и обратить на пользу обучению.

Одна из основных бед школярского подхода — преувеличенное внимание к оформлению работ. При этом упор делается не на то, насколько оформление пригодно для объяснения другим мыслей учащегося, а на соответствие некоторым произвольно заданным внешним стандартам и на внешнюю красоту. Такая фетишизация внешних форм приводит многих способных учащихся к негативистской реакции в виде полного пренебрежения оформлением.[11] В творческой работе оформление является способом отлить содержание в соответствующую ему форму. Поэтому необходимо вырабатывать взвешенное и трезвое отношение к нему. Оформление плохо, если оно мешает понять основные мысли. Гармония идей и оформления не всегда достижима в работе одного и того же человека: некоторые люди лучше генерируют идеи, другие — их обосновывают, третьи — популяризируют.[12] Здесь тоже выступает роль коллективной работы.

Принцип 6: Поощряйте хорошее оформление хороших идей. Наказывайте их безобразное оформление либо красивую упаковку на пустышке.

---

[11] Интересна обратная связь данного недостатка с мышлением школьных учителей. В школах повышенного типа зачастую небрежность, а то и безобразный стиль оформления, считается атрибутом творческих, способных учащихся. Нередко хорошее оформление и доведение до конца работ приводит к тому, что преподаватели рассматривают способного ученика как субъекта средних способностей, берущего в основном старательностью и усидчивостью.

[12] Здесь имеется в виду популяризация в самом общем смысле слова — умение сделать идеи доступными более широкому кругу людей, чем тот, который понимал оригинальную работу. Внутринаучная популяризация не менее важна, чем ориентированная на публику.

3 Предварительный курс логики: язык математики

Курс “Язык математики” появился в программе УдГУ в конце 70-х гг., когда была достигнута договоренность о том, чтобы выделить некоторые базисные логические понятия, необходимые для всех математических курсов и поэтому обычно дублируемые в них, в единый курс, и, кроме того, использовать часть часов т.н. “Введения в специальность” для настоящего введения в специальность, а не для представления кафедр и направлений.

Известно, что одним из базисных умений математика, особенно математика-прикладника, является владение навыками перевода с естественного языка на формализованный и обратно. Тем не менее традиционно это умение остается за рамками всех математических курсов, считается, что учащийся и так может прочитать сложную формулу, а записывать условия задач в виде формул он научится, подражая действиям преподавателя. Конечно же, такое предположение совершенно необосновано, и, более того, может рассматриваться как достаточно грубая ошибка, одновременно методологическая, психологическая и методическая.

Курс, посвященный специально математическому языку и методам перевода, оказался тем решающим звеном, которое обеспечило высокий престиж логического цикла и его влияние на остальные математические циклы. Поэтому ему посвящена большая часть дальнейшего изложения.

Обучению методам перевода в значительной степени мешает устанившаяся традиция начинать изложение логического языка с логики высказываний и переходить к предикатам и кванторам лишь после ее освоения. На самом деле высказывание $A \Rightarrow B$ практически всегда является либо сокращенным выражением предикатной формулы $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$, либо ее подстановочным частным случаем $A(t) \Rightarrow B(t)$. Даже таблица истинности для импликации легче всего объясняется на частных случаях общего выражения типа

$$\text{Если } x \text{ делится на 6, то } x \text{ делится на 3} \tag{1}$$

То, что считается основным достоинством логики высказываний: таблицы истинности — половина первокурсников проходили самостоятельно либо в школе. Остальные овладевают ими, как показывает опыт, за один академический час. Поэтому стоит начинать прямо с языка логики предикатов.

Более того, перед изучением языка логики предикатов рассматривается общая структура высказываний с точки зрения современной логики. Выде-

ляются элементарные высказывания, состоящие из предиката, примененного к предметам, и конструкции, строящие из элементарных более сложные высказывания: логические связки, кванторы, модальности. Уже здесь говорится о возможных мирах, поскольку понимание выражений типа

Иван-царевич женился на царевне-лягушке (2)

требует перехода к тому миру, где действуют данные персонажи.

Вводится еще одно важное понятие, о котором обычно стыдливо умалчивается в курсах даже содержательной логики: квазивысказывания. Это утверждения, имеющие внешнюю форму высказываний, но не поддающиеся проверке на истинность объективными средствами. Например, таковы утверждения вида:

Саша любит Машу (3)

Но тем не менее и с такими выражениями часто обращаются по тем же правилам, что и с высказываниями. Более того, они теснейшим образом связаны с высказываниями через аппарат модальностей. Например, следующие два утверждения

Волга впадает в Каспийское море
Сталин утверждал, что Троцкий ненавидел СССР (4)

— высказывания, а следующие два

Ваня уверен, что Волга впадает в Каспийское море
Троцкий ненавидел СССР (5)

— уже квазивысказывания.

В языке логики предикатов обращается внимание на то, что перевод между формальным и естественным языком производится целыми блоками, минимальными из которых являются аристотелевы комбинации

Все A есть B	$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$
Некоторые A есть B	$\exists x(A(x) \& B(x))$

(6)

При переводе на формальный язык обращается внимание не только на формальную правильность высказываний, но и на их форму, на нахождение не просто верной, а достаточно выразительной формулировки. Форма в идеале

должна хотя бы намекать на те аспекты содержания, которые формально невыразимы в классической логике[13] и тем самым облегчать обратный перевод на содержательный язык. Приведем несколько примеров.

Не поощряется стремление учащихся выносить все кванторы в сложном высказывании вперед, поскольку эта техника принадлежит лишь классической логике и даже в ней провоцирует ошибки при комбинации условий ограниченных кванторов. Скажем, для утверждения “Все парни любят девушек” неверны оба перевода

$$\begin{gathered}\forall x \exists y((\text{П}(x) \& \text{Д}(y) \Rightarrow \text{Л}(x,y)) \\ \forall x \exists y((\text{П}(x) \& \text{Д}(y) \& \text{Л}(x,y))\end{gathered} \tag{7}$$

Поэтому в большинстве случаев поощряется т. н. *водворенная форма*, где каждый квантор охватывает минимальную подформулу.

Для многих студентов является открытием, что сложное выражение стоит чаще всего писать либо снаружи внутрь: либо изнутри снаружу, но не от начала к концу, и на это стоит обязательно обратить внимание.

Обращается внимание на то, что многие утверждения, одинаковые по синтаксической форме, должны переводиться по-разному ввиду того, что подразумевается в их контексте. Например, четыре утверждения

Все члены Политбюро, избранного на XIV съезде ВКП(б), ненавидели друг друга
Все доисторические ящеры пожирали друг друга
Все ханы воевали друг с другом
Все известные философы критиковали друг друга (8)

переводятся, соответственно,

$$\begin{gathered}\forall x \forall y(\text{ЧП}(x) \& \text{ЧП}(y) \& x \neq y \Rightarrow \text{Н}(x,y) \& \text{Н}(y,x)) \\ \forall x(\text{ДЯ}(x) \Rightarrow \exists y(\text{ДЯ}(y) \& (\text{П}(x,y) \vee \text{П}(y,x)))) \\ \forall x(\text{Хан}(x) \Rightarrow \exists y(\text{Хан}(y) \& \text{В}(x,y) \& \text{В}(y,x))) \\ \forall x(\text{ИФ}(x) \Rightarrow \exists y(\text{ИФ}(y) \& \text{К}(x,y)) \& \exists y(\text{ИФ}(y) \& \text{К}(y,x)))\end{gathered} \tag{9}$$

Утверждение про ящеров позволяет выявить еще одну тонкость. Очень хочется перевести его как

$$\forall x(\text{ДЯ}(x) \Rightarrow \exists y(\text{ДЯ}(y) \& (\text{П}(x,y) \oplus \text{П}(y,x)))) \tag{10}$$

[13] В частности, на модальности.

где $\oplus$ обозначает исключающее или. В самом деле, это только в сказке Чуковского ‘Волки от испуга скушали друг друга’. Но формулировка отрицания обоих вариантов позволяет все-таки сделать выбор в пользу первого: его отрицание столь же естественно, как и его формулировка. Это позволяет обратить внимание на еще один принцип хорошей формализации, крайне редко формулируемый явно:

> Не говори лишнего без необходимости.

Если утверждения уже стали истинными в естественной модели, поработайте с ними, а новые добавляйте, лишь если в них выявилась необходимость.

Все это предоставляет возможность проиллюстрировать основные принципы математической формализации, ее достоинства и недостатки и подготовить студентов к деятельности по построению математических моделей и их содержательной перепроверке.

В курс языка математики включаются и базовые математические понятия. Они также используются для иллюстрации одновременно мощи и ограниченности формальных методов и для подчеркивания нестандартных ходов. В частности, аппарат диаграмм Венна [7] используются для разрушения стеореотипа, что чертеж не может быть доказательством, и одновременно для анализа самого понятия доказательства. На их примере показывается, что нужно обосновать для того, чтобы некоторая конструкция могла считаться доказательством, и дается содержательное определение доказательства с точки зрения прикладной математики и информатики:

> Доказательство — конструкция, синтаксическая правильность которой гарантирует семантическую.

Множества используются также для того, чтобы обратить внимание на взаимосвязь между математическими формулировками и представлением данных. После выяснения трудностей, связанных с представлением данных как множеств, естественен переход к мультимножествам (наборам) и кортежам.

При формулировке понятия функции обращается внимание на то, что ее классическое определение полностью опускает одно из центральных для приложений мест содержательного: *способ* преобразования аргумента в результат. Это является мостиком к теории алгоритмов, теории категорий и конструктивной логике.

На примере понятия прямого произведения множеств показывается еще одна неадекватность теоретико-множественных конструкций и вводится на примерах язык коммутативных диаграмм.

Таким образом, вводный логический курс закладывает основу единого видения различных концепций математики и информатики и критического подхода к ним.

Можно считать, что материал данного курса уже устоялся и оброс адекватной системой упражнений для отработки необходимых навыков.

4 Другие курсы логического цикла

Общий курс логики в большинстве случаев читался на I курсе во втором семестре и включал в себя классическую логику. Основным аппаратом являются семантические (аналитические) таблицы. Их можно ввести как кодификацию аппарата сокращенных таблиц истинности для логики высказываний, а затем его обобщение на логику предикатов.

Большим методическим преимуществом семантических таблиц является то, что задача ставится в форме: “Проверить высказывание”. Традиционные задачи на доказательство опасны тем, что приглушают критическое мышление и вызывают соблазн действовать по принципу: “Вы только скажите нам, что доказать, а мы уж докажем!” Семантические таблицы позволяют ставить перед учащимися множество задач различной трудности, в том числе и задачи, связывающие строгую технику формальных рассуждений с техникой перевода:

- проверить рассуждение, записанное на естественном языке;
- сформулировать следствие из посылок, выраженных на естественном языке;
- восполнить утверждения, пропущенные в содержательно убедительном рассуждении на естественном языке, с тем, чтобы оно стало и математически корректным.

При формулировке данных задач часто используется методический прием, изобретенный Л. Керролом [6]: формулировать задачи таким образом, чтобы для их интерпретации приходилось изобретать свой собственный мир. В частности, классический пример Керрола:

$$\frac{\text{Некоторые цыплята — кошки.}\quad \text{Некоторые кошки знают французский язык.}}{\text{Значит, некоторые цыплята знают французкий язык.}} \tag{11}$$

Неожиданным для учащихся является и то, насколько много простых утверждений подразумевается в самых естественных рассуждениях без явной формулировки. А умение выделять неявные условия — одна из наиболее тонких сторон искусства формализации.

Основные теоремы математической логики (корректности и полноты) доказываются в случае семантических таблиц весьма естественно, но опять-таки поучительно с методической точки зрения. При их доказательстве приходится переходить от формального, удобного, но трудно формализуемого понятия семантической таблицы к легко формализуемому, но неудобному: дереву секвенций. Это позволяет показать разницу между математической и прикладной формализациями.

От основных теорем естественен переход к теореме компактности и к методам нестандартного анализа [4]. Данный раздел включается в курс логики с той целью, чтобы показать неединственность аналитического мира и продемонстрировать мощь логических методов в других областях математики. После его появления стало возможным постепенно склонять сообщество специалистов в области математического анализа к пересмотру их педагогических установок в сторону увеличения точности и отказа от безапелляционности. Но этот процесс идет довольно медленно. Он затрудняется тем, что традиционно принято отводить на освоение аналитического цикла вдвое больше учебного времени, чем другим математическим дисциплинам, а материал данного цикла не превосходит по глубине идей, трудности и объему современную алгебру либо логику. Далее, в курсах аналитического цикла почти не опираются при стандартной методике их преподавания на достижения других отраслей математики. Преподаватели по-прежнему заставляют студентов заучивать таблицы интегралов и прочие подобные правила, вместо того, чтобы учить их пользоваться современными системами аналитических преобразований и больше времени уделить базовым понятиям и принципиальным вопросам. Несмотря на великолепную разработанность системы задач и упражнений по анализу, практически не выдаются индивидуализированные контрольные работы, которые позволяют исключить фактор списывания при оценке технической подготовленности студентов. Методика изложения по-прежнему находится на уровне XIX века.

Поэтому урезание в учебном плане специальности ‘информационные системы’ курса математического анализа до объемов других математических курсов было ошибочно воспринято некоторыми специалистами как дискриминация и недооценка фундаментального математического образования. У нас в унивекрситете мы смогли отстоять данную позицию, показав, что мож-

но сэкономить половину учебного времени, пользуясь интердисциплинарными связями и обучением более высокого уровня.

В основной курс логики включается также один из следующих разделов: естественный вывод либо λ-исчисление (первое — для математиков, второе — для информатиков). И для тех, и для других дается краткий обзор неклассических логик.

Главной целью курса являются результаты о неполноте, которые окончательно подрывают иллюзии одноуровневого математического мышления и подготавливают студентов к восприятию многоуровневого рефлексивного стиля мышления, который позволяет выводить основные положения современной теории творческого мышления как полуформальные следствия современных логических методов.[14]

В настоящее время курсы по теории алгоритмов и неклассическим логикам рассматриваются прежде всего как мост от логической теории к ее приложениям в информатике и алгебре. Поэтому большое внимание уделяется взаимоотношениям алгебраических и алгоритмических понятий, сложности алгоритмов, конструктивным логикам и их взаимосвязи с программированием, теории абстрактных типов данных.

К логическому циклу отнесли у нас в университете и тот курс, который стоит над циклами: вновь введенный курс Математические структуры. Данный курс читается в конце основного цикла математических дисциплин и посвящен показу методов взаимодействия и соотношений различных частей математики. В частности, много внимания уделяется задачам, формулируемым на языке одного из разделов математики, а легче всего решаемым методами другого раздела (алгебра с помощью геометрии, геометрия через алгебру, алгебра и логика друг через друга, анализ через геометрию, алгебру и логику).

Объективной реальностью является также то, что в курсе Математических структур приходится резервировать по крайней мере четверть времени на исправление недоработок других курсов. Каждый раз оказывается, что некоторые фундаментальные и важные для приложений данной области математики понятия были в ее титульном курсе либо вообще забыты, либо даны

[14]Большинство авторов, занимающихся теорией творческого мышления, в частности, де Боно и Г.С. Альтшуллер [1], подчеркивают несовместимость творческого мышления и логики, рассматривая логику как кодификацию рутинного мышления. Это справедливо лишь для некоторого (к несчастью, устоявшегося) стиля преподавания логики. Это полностью ошибочно по отношению к современной логике, пользующейся методами и результатами математической логики в неформализуемых областях.

чисто обзорно, без развития и задач. Точно так же происходит и с теоремами. Например, алгебраисты через год забывают связать группы с симметриями, либо дать понятие полугрупп. Эти две недоработки не исключают и других. Специалисты по анализу регулярно вообще забывают сформулировать определение подпоследовательности (а это понятие к элементарным и очевидным никак не отнесешь).

5 Некоторые результаты педагогических экспериментов

Автор с недоверием относится к цифровым выкладкам, пытающимся с помощью в лучшем случае весьма грубых, а в типичном — неадекватных шкал измерить результаты педагогических экспериментов. Поскольку здесь и цели, и методы, и экспериментаторы, и обучаемые суть неформализуемые сущности, все это лишь уступка требованиям диссертабельности работ либо защита от нападок невежественных оппонентов (умные найдут дыры в способе измерений, но умные оппоненты не страшны разумному эксперименту.) Но иногда случайное формализованное измерение кое-что высвечивает.

В конце 1995 г. в УдГУ работала комиссия Минвуза России по проверке качества преподавания. В частности, была проведена министерская контрольная по математике на математическом факультете. Ее итоги стали скандальными и были утаены в отчете комиссии: результаты студентов УдГУ оказались существенно выше студентов МГУ. Так что можно по крайней мере утверждать, что видоизменение педагогических принципов качеству обучения математике не повредило.

Конечно, на первом курсе студенты с удивлением осознают разницу в требуемом от них стиле поведения, а выявляющаяся относительность математических “истин” вызывает у них даже некоторый шок. Но быстро развивающиеся у значительной доли студентов ростки критического мышления начинают помогать им в освоении других курсов из области математики и информатики.

За последние годы студенты УдГУ неоднократно занимали классные места на конкурсах студенческих работ в области математики и программирования, ими опубликовано несколько десятков научных работ, созданы обучающие системы по математической логике и нескольким разделам аналитического цикла.

Попытки преподавания студентам, прошедшим логический цикл, методов современного творческого мышления со стороны приверженцев традиционных школ инженерного творчества заканчивались интересным конфузом: студенты решали предложенные задачи без применения “алгоритмов решения технических задач”, они не нуждались во вредно влияющем на психику т. н. расшатывании воображения, поскольку уже привыкли воспринимать наш мир лишь как один из возможных, и в итоге делали вывод, что эти курсы ничего нового, за исключением некоторых любопытных частных примеров, не дают.

Столь же трудно стало работать и преподавателям гуманитарных дисциплин, которые сплошь и рядом становились в тупик после естественных вопросов либо неожиданных выводов студентов. Например, смехом было встречено высказывание одного из преподавателей философии: “Логически невозможно, чтобы бесконечное было частью конечного.” Он ведь о нестандартном анализе не имел понятия (хотя в свое время учился на математическом факультете и среди местных философов считается специалистом по математике!) Но зато повысился неформальный интерес студентов к гуманитарной литературе, в частности, к первоисточникам по философии, историческим сочинениям, культурам Китая и Индии, богословию.

Пожалуй, самым важным неформальным итогом частичного перехода на новые принципы обучения является изменение атмосферы в коридорах факультета: за последние годы стало обычным наблюдать группы студентов, обсуждающих научные вопросы. А, как известно, эффективнее всего люди учатся не на формальных занятиях, а друг у друга. Это замечал еще Я. А. Коменский, но данная часть его педагогической системы была отброшена последователями как противоречащая авторитарному стилю обучения и формальной дисциплине на занятиях.

6 Опасности данного подхода

Логика является высокоуровневой наукой, но она содержит несколько простейших методов, и поэтому ее преподавание исключительно легко вульгаризировать. Далее, автор в последние годы столкнулся с другой вульгаризацией: когда пытаются дать сложные логические преобразования, не подготовив почвы.

Если каждый из других столпов математики может (ценой некоторых методологических и методических вульгаризаций и проскакивания определе-

ний и анализа некоторых из используемых понятий и методов) практически замкнуться внутри себя и при этом создавать у студентов иллюзию цельного взгляда на математику, а то и на весь научный мир, то логика начинает давать интересные результаты прежде всего на стыке с другими областями. Она не может оторваться от философии, как указывается и в книге [8]. Поэтому построение математики на базе логики не может быть самодостаточным, и мы вынуждены подвергаться всем опасностям взаимодействия с другими дисциплинами.

Это особенно важно в тех университетах, где нет сильных и разнообразных школ, поскольку в них количество хороших специалистов в некоторой жизненно важной области легко может сократиться до нуля. А это означает перекос математического образования, и тем более сильный, чем выше была поднята планка. Так что в данном отношении математический анализ — наиболее безопасная основа, поскольку крыша поднимается минимально.

(Добавлено при втором пересмотре статьи)

За последние годы основную часть сектора IT-индустрии Ижевска заняли компании, возглавляемые выпускниками УдГУ, учившимися по экспериментальной программе. Когда представители компаний встречались со студентами, студенты были шокированы тем, что боссы и ведущие специалисты говорили им не о необходимости освоения новейших систем, а о необходимости обращать, особенно на первых курсах, основное внимание на фундаментальную подготовку, и в первую очередь на те курсы, которые «мозги в правильную сторону поворачивают.» И первое место среди этих курсов заняла логика.

То же самое наметилось и в Новосибирске. Тупейшие претензии типа «Ваши выпускники не знают как следует Cold Fusion» сменились на осознание того, что выпускники полностью подготовлены к тому, чтобы за два месяца стать асами в любой конкретной системе. Но это обеспечивает лишь общая фундаментальная подготовка.

Далее, за три года, пока автор работал в Новосибирске и писал книгу, выявилось следующее. Поскольку у других не было энтузиазма и авторитета отстаивать свой учебный план в условиях нарастающего мелочного бюрократического контроля со стороны Москвы, специальность в УдГУ перешла вновь на стандартный учебный план, отражающий опыт работы случайной кафедры случайного московского вуза (кстати, отнюдь не самый глупый из навязываемых Москвой учебных планов, но сохраняющий их общую особенность: отсутствие единой идеи и учета сильных сторон конкретного университета). Работодатели взвыли, убедившись, насколько сразу же упал уровень

выпускников.

Это еще раз подтвердило, что *учебные планы и стандарты в области информационных технологий полностью неадекватны сложившейся ситуации*, и данный факт необходимо воспринимать с открытыми глазами,если мы действительно желаем диверсификации экономики.

7 Необходимость новой математической специальности

В последнее время становится ясно, что Россия неконкурентоспособна с Индией и Китаем на уровне кодирования и простого программирования. Неизбежные издержки, связанные с более высокой стоимостью рабочей силы и более высоким объективным уровнем затрат на поддержание жизненного уровня, приводят к тому, что даже некоторые российские фирмы привлекают индийских кодеров[15].

Поэтому необходимо занимать свою нишу на уровне *brainware*, что вызывает необходимость подготовки аналитиков и постановщиков задач. Таких специалистов *в принципе* можно готовить на базе исключительно высокоуровневого гуманитарного курса (например, философии либо лингвистики), либо на базе математики. Ввиду отсутствия критической массы высококвалифицированных кадров в гуманитарных областях в России остается лишь один выход: готовить информатиков на базе математики.

Собственно с педагогической точки зрения при подготовке информатиков необходимо принимать во внимание следующее концептуальное (и проблемное) противоречие:

> Тот, кто начал на 1 курсе изучать новейшие системы, выходит с 5-го, зная морально устаревшие.

Далее, в условиях дефицита населения невозможно более относиться к человеческим ресурсам как к чему-то неисчерпаемому. Традиционная российская система подготовки кадров высшей квалификации заранее отметает

[15] В частности, даже одна из фирм, возглавляемая учеником автора, вовсю использует следующую систему работы: русские специалисты ставят задачу, пишут критические методы и доводят ее, а кодирование второстепенных процедур, занимающих 80% программного текста, ведут индусы.

80% студентов (причем отнюдь не худших студентов) как отходы производства. Особенно ярко это проявляется в системе МГУ, НГУ и МФТИ.

И, наконец, недопустимо в погоне за формальным приближением к мировому уровню терять свои собственные достоинства, их нужно развивать и смиряться с тем, что *любое достоинство имеет неразрывно связанные с ним недостатки* (принцип Пеле). Нужно учитывать психологию наших студентов и не пытаться копировать рассчитанные на другой психологический тип методы подготовки Америки либо Европы, и вместе с тем смело брать оттуда все лучшее. Словом, *как* перенимать чужое, нужно учиться у японцев, а не у наших реформаторов.

Нужно четко понимать, что математика, сохраняя единство, все больше делится на две громадных области с разным аппаратом и ценностями: численную и нечисленную. Нечисленная математика дает как раз тот «поворот мозгов», который требуется для успешной работы на средних и высших должностях в IT-производстве. Далее, она великолепно поддерживает нынешние технологии индустриального программирования. что дает возможность *всем* успешно закончившим стать квалифицированными и востребованными специалистами. Отходы с 80% снижаются до приемлемого уровня 20%.

Тот учебный план в области прикладной математики и информатики, который спущен сверху и по которому ныне работает УдГУ, составлен специалистами, *в принципе* понимающими данную проблему. Но они не могут преодолеть идолопоклонничество большинства Ученого Совета и отказаться от анализоцентризма, в итоге недостаточное количество нечисленных курсов оказалось механически добавлено к численным, а весь план получился перегруженным и практически неисполнимым (а даже если его исполнить, все равно ни к чему хорошему это не приведет ввиду отсутствия общей концепции).

Итак, нужно создавать новую специальность, и единственный путь к этому — отпустить в «свободное плавание» тех, кто готов действовать в данном направлении (как минимум, университеты Новосибирска, Нижнего Новгорода, Иркутска, Ижевска), а уж затем обсудить их опыт и выработать рекомендации. Попытка преждевременно навязать сверху новые стандарты ни к чему хорошему не приведет.

Демагогия об интересах студентов парируется тем, что именно экспериментальные выпускники более всего востребованы, как доказывает многолетний опыт.

Список литературы

[1] Г. С. Альтшуллер. Творчество как точная наука. М., Советское радио, 1979.

[2] E. de Bono. Creative thinking. New York, 1974.

[3] E. de Bono. Po: beyond yes and no. New York, 1978.

[4] М. Девис. Прикладной нестандартный анализ. М., Мир, 1980.

[5] Я. А. Коменский. Избранные труды, т. 1. М., Просвещение, 1988.

[6] Л. Кэррол. История с узелками. М., Мир, 1973

[7] А. С. Кузичев. Диаграммы Венна. М., Наука, 1968.

[8] Ан. А. Мальцев. Общее математическое образование: традиции и современность. Новосибирск, 1997.

[9] Н. Н. Непейвода. Прикладная логика. Ижевск, 1997 (2-е издание Новосибирск, 2000).

[10] Н. Н. Непейвода, И. Н. Скопин. Основания программирования. Москва—Ижевск, РХД, 2003.

[11] Н. Н. Непейвода. Стили и методы программирования. Москва, ИНТУИТ, 2005.

[12] А.Н. Анисимов, В. В. Пупышев. 1001 задача по программированию. Москва, ИНТУИТ, 2005.